



Sumber: Art and Gallery

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan fungsi linier dan fungsi kuadrat	<ul style="list-style-type: none">6.1 Mendeskripsikan perbedaan konsep relasi dan fungsi6.2 Menerapkan konsep fungsi linier6.3 Menggambarkan fungsi kuadrat6.4 Menerapkan konsep fungsi kuadrat

A. PENDAHULUAN

Standar Kompetensi **Konsep Fungsi** terdiri dari empat (4) Kompetensi Dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap Kompetensi Dasar memuat Tujuan, Uraian materi, Rangkuman dan Latihan. Kompetensi Dasar dalam Standar Kompetensi ini adalah **Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi, Konsep Fungsi Linier, Konsep Fungsi Kuadrat dan Penerapan Konsep Fungsi Kuadrat**

Standar kompetensi ini digunakan sebagai dasar untuk mempelajari kompetensi lain yang masih ada kaitannya dengan fungsi seperti kompetensi program linier, aplikasi fungsi dalam bidang ekonomi seperti fungsi permintaan, fungsi penawaran ataupun aplikasi fungsi dalam bidang teknologi seperti menentukan volume benda putar, luas daerah yang di batasi oleh dua kurva dalam rangka menunjang program keahliannya.

Sebelum mempelajari standar kompetensi ini diharapkan anda telah menguasai standar kompetensi Sistem Bilangan Real terutama tentang perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan bilangan real, persamaan dan pertidaksamaan maupun kompetensi yang lain yang dapat menunjang standar kompetensi Konsep Fungsi

Pada setiap akhir Kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah sampai soal-soal yang sukar. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan anda terhadap kompetensi dasar ini, artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukur sendiri kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan anda supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap siswa, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah anda layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Anda dinyatakan layak jika anda mampu mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

B. KOMPETENSI DASAR

B.1. Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi

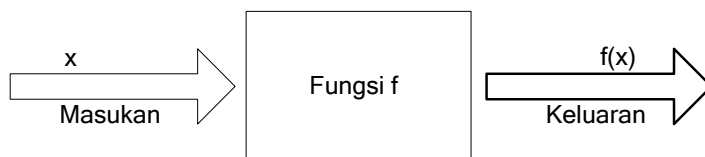
a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Membedakan pengertian relasi dan fungsi
- Menentukan daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain*), dan daerah hasil (*range*)
- Menguraikan jenis-jenis fungsi

b. Uraian Materi

Bayangkan suatu fungsi sebagai sebuah mesin, misalnya mesin hitung. Ia mengambil suatu bilangan (masukan), maka fungsi memproses bilangan yang masuk dan hasil produksinya disebut keluaran.



Setiap bilangan (x) yang dimasukkan kemudian dihubungkan dengan satu bilangan tunggal sebagai keluaran, tetapi dapat juga bahwa beberapa nilai masukan yang berlainan memberikan nilai keluaran yang sama.

1). *Definisi Relasi*

Relasi dari dua himpunan A dan B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota B.

Contoh 1

Jika himpunan $A = \{\text{Bandung, Surabaya, Medan}\}$
 $B = \{\text{Jabar, Jatim, Sumut}\}$.

Bandung adalah Ibukota provinsi Jabar, Surabaya Ibukota provinsi Jatim dan Medan Ibukota provinsi Sumut. Jadi relasi antara himpunan A ke himpunan B adalah "Ibukota Provinsi".

Relasi antara dua himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan :

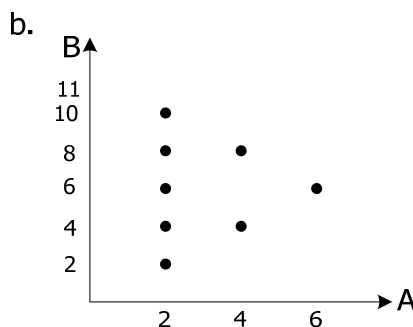
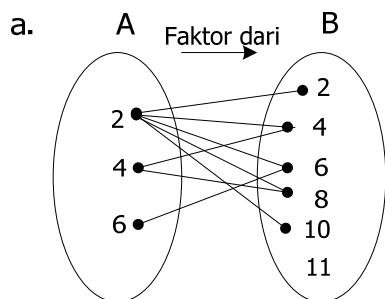
- a. Diagram Panah
- b. Diagram Cartesius
- c. Pasangan Berurutan.

Contoh 2

Jika $A = \{2, 3, 6\}$ $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 11\}$. Relasi dari himpunan A ke B adalah "Faktor dari", nyatakanlah relasi tersebut dengan :

- a. Diagram Panah
- b. Diagram Cartesius
- c. Himpunan pasangan berurutan.

Jawab:



- c. Himpunan pasangan berurutannya : $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 4), (4, 8), (6, 6)\}$

2). *Domain, Kodomain dan Range*

Pada relasi dari himpunan A ke B, himpunan A disebut Domain (daerah asal) himpunan B disebut Kodomain (daerah kawan) dan semua anggota B yang mendapat pasangan dari A disebut Range (daerah hasil).

Contoh 3

Tuliskan Domain, Kodomain dan Range dari relasi **Contoh 2** di atas :

Jawab:

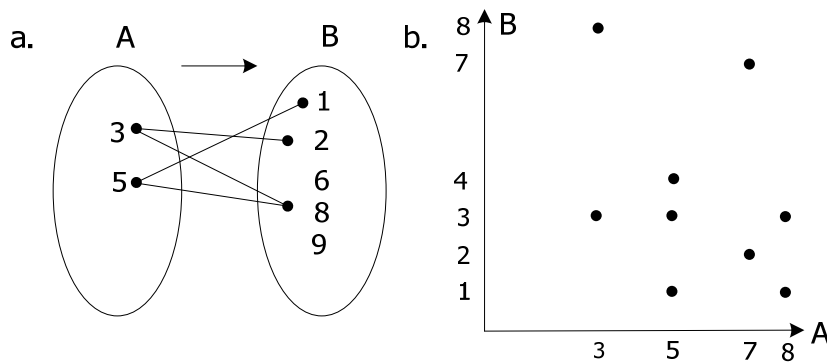
$$\text{Domain} = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{Kodomain} = \{2, 4, 6, 8, 10, 11\}$$

$$\text{Range} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Contoh 4

Tentukanlah domain, kodomain dan range dari relasi di bawah ini:



Jawab:

a. Domain = $\{3, 5\}$

Kodomain = $\{1, 2, 6, 8, 9\}$

Range = $\{1, 2, 8\}$

b. Domain = $\{3, 5, 7, 8\}$

Kodomain = $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$

Range = $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$

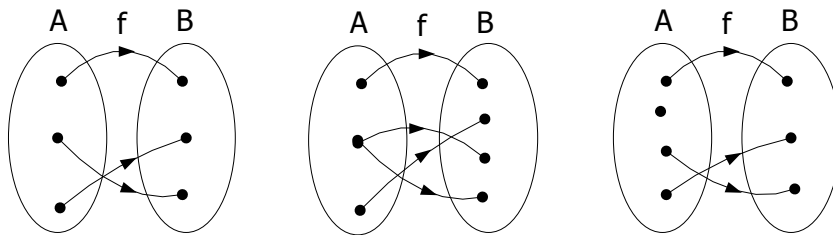
3) . Definisi fungsi

Fungsi f adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (Domain) dengan suatu nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (Kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (Range)

Untuk memberi nama suatu fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f , g , dan huruf lainnya. Maka $f(x)$, yang di baca " f dari x " menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x . Misalkan : $f(x) = x^2 + 2$, maka $f(3) = 3^2 + 2$

Contoh 5

Manakah relasi di bawah ini yang merupakan fungsi, jika relasi dari A ke B



Jawab:

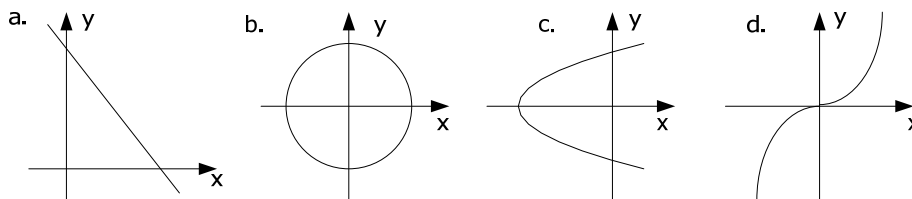
Relasi pertama merupakan fungsi, karena setiap anggota domain A berelasi tunggal terhadap anggota kodomain B

Relasi kedua bukan merupakan fungsi, karena ada anggota domain A yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain B

Relasi ketiga bukan merupakan fungsi, karena ada anggota domain A yang tidak berelasi dengan anggota kodomain B

Contoh 6

Dari grafik di bawah ini, mana yang merupakan fungsi, jika domain sumbu x



Jawab:

Grafik a. merupakan fungsi, karena setiap anggota domain x berelasi tunggal terhadap kodomain y

Grafik b. bukan merupakan fungsi karena ada anggota domain x yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain y, yaitu ada anggota x jika kita tarik sejajar sumbu y akan mendapatkan dua titik potong.

Grafik c. bukan merupakan fungsi karena ada anggota domain x yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain y, yaitu ada anggota x jika kita tarik sejajar sumbu y akan mendapatkan dua titik potong.

Grafik d. merupakan fungsi, karena setiap anggota domain x berelasi tunggal terhadap kodomain y

Contoh 7

Mana dari himpunan A, B dan C berikut ini yang merupakan fungsi ?

$$A = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 8)\}$$

$$B = \{(1, 6), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10)\}$$

$$C = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$$

Jawab:

Yang merupakan pemetaan atau fungsi adalah himpunan A dan C. B bukan fungsi sebab pada himpunan B domain 1 muncul dua kali (berelasi dengan nilai 6 dan 7 pada kodomain).

Contoh 8

Jika $g : x \rightarrow 3x^2 + 5$ dan domainnya $\{-3 \leq x \leq 1, x \in B\}$, tentukan daerah hasil dan buatlah himpunan pasangan berurutannya.

Jawab:

$$\text{Domain} = \{-3 \leq x \leq 1, x \in B\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$g(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 5 = 3 \cdot 9 + 5 = 32$$

$$g(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 5 = 3 \cdot 4 + 5 = 17$$

$$g(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$$

$$g(0) = 3 \cdot 0^2 + 5 = 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$g(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$$

$$\text{Jadi Range} = \{32, 17, 8, 5\}$$

$$\text{Himpunan pasangan berurutannya} : \{(-3, 32), (-2, 17), (-1, 8), (0, 5), (1, 8)\}$$

Contoh 9

Diketahui $f(x) = ax + b$ dengan $f(-4) = -3$ dan $f(2) = 9$. Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan fungsinya.

Jawab:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(-4) = a(-4) + b = -3$$

$$-4a + b = -3 \quad \dots\dots (1)$$

$$f(2) = a \cdot 2 + b = 9$$

$$2a + b = 9 \quad \dots\dots (2)$$

Eliminasikan 1 dan 2 diperoleh:

$$-4a + b = -3$$

$$\underline{2a + b = 9} -$$

$$-6a = -12$$

$$a = 2,$$

substitusi nilai $a = 2$ ke $2a + b = 9$

$$2 \cdot 2 + b = 9$$

$$b = 5$$

Jadi fungsinya $f(x) = 2x + 5$

4). Perbedaan relasi dan fungsi

Dari contoh 1 dan 2 di atas dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi (pemetaan) merupakan relasi, sedangkan sebuah relasi belum tentu sebuah fungsi.

Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B = b adalah b^a

Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota B ke anggota A jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B = b adalah a^b

Contoh 10

Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{5, 6\}$ maka banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari A ke B sebanyak $2^5 = 32$ dan banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari B ke A sebanyak $5^2 = 25$

Pemetaan khusus yang terjadi jika setiap anggota A dipasangkan tepat satu ke anggota B dan anggota B dipasangkan tepat satu dengan anggota A disebut *Korespondensi Satu-satu Pada*. Korespondensi satu-satu akan mungkin terjadi jika banyaknya anggota A = banyaknya anggota B

Banyaknya korespondensi satu-satu pada yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A atau B = n adalah $n!$ dengan $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Contoh 11

a $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b Banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke B jika $(n)A = (n)B = 6$ adalah $6!$
 $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Aturan relasi merupakan pusat suatu fungsi, tetapi hasil sebuah fungsi belum dapat ditentukan sampai daerah asalnya diberikan. Ingatlah bahwa domain adalah himpunan anggota yang kepadanya fungsi memberikan nilai.

Jika suatu fungsi daerah asalnya tidak dirinci, maka daerah asalnya kita anggap himpunan terbesar bilangan real sedemikian sehingga fungsi memberikan nilai bilangan real. Daerah asal yang kita peroleh disebut daerah asal alami

Contoh 12

Tentukan domainnya sehingga fungsi di bawah ini memberikan nilai bilangan real

a. $y = 2x^2 + 4$

b. $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$

c. $y = \sqrt{2x - 6}$

Jawab :

a. Daerah asalnya $x \in \text{Real}$, karena setiap x elemen bilangan real, fungsi memberikan nilai bilangan real : $D_f = \{x \in \text{R}\}$

b. fungsi $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$ merupakan fungsi pecahan, dimana fungsi tidak akan memberikan suatu nilai jika penyebutnya bernilai 0 (nol). Jadi Daerah asalnya $x \in \text{R}$ dimana $x + 4 \neq 0$ atau $D_f = \{x \mid x \neq -4, x \in \text{R}\}$

c. fungsi $y = \sqrt{2x - 6}$ merupakan fungsi dalam akar, dimana fungsi tidak akan memberikan suatu nilai real jika di dalam akar bernilai negatif. Jadi Daerah asalnya $x \in \text{R}$ dimana $2x - 6 \geq 0$ atau $D_f = \{x \mid x \geq 3, x \in \text{R}\}$

5). *Jenis-jenis fungsi*

Jenis-jenis fungsi yang perlu kita ketahui diantaranya adalah :

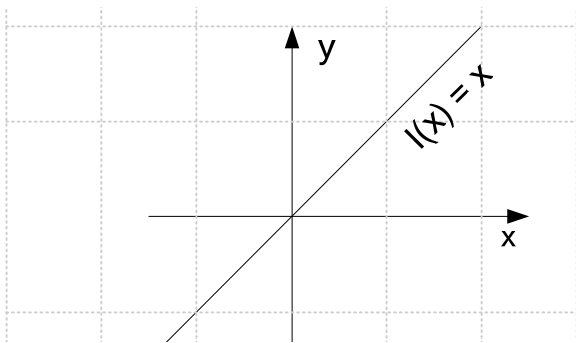
a). Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah fungsi f yang dinyatakan dalam rumus $f(x) = c$, dengan c suatu konstanta. Grafiknya jika dilukis dalam suatu sumbu koordinat dimana domainnya sumbu x merupakan garis yang sejajar dengan sumbu x .

b). Fungsi Identitas

Fungsi Identitas adalah suatu fungsi f yang dinyatakan dalam rumus $f(x) = x$. Fungsi identitas sering dinyatakan dengan lambang I sehingga $I(x) = x$.

Grafiknya sebagai berikut :



c). Fungsi Modulus atau fungsi harga mutlak

Fungsi modulus adalah fungsi f yang memuat bentuk nilai mutlak

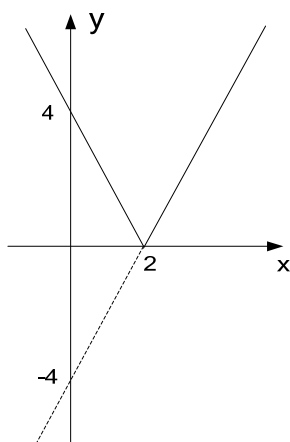
Contoh 13

Lukislah grafik fungsi $f(x) = |2x - 4|$

Jawab:

Lukis dahulu grafik $y = 2x - 4$, setelah itu grafik yang terletak di bawah sumbu x , kita positipkan dengan cara mencerminkan grafik di bawah sumbu x dengan cerminnya adalah sumbu x

x	0	2	4
$Y = 2x-4 $	$ -4 = 4$	0	4

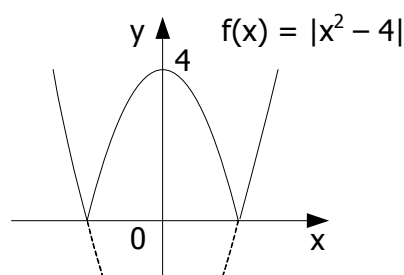


Ternyata grafik $y = |ax - b|$ simetris pada $x = b/a$, gampang ya melukisnya!!



Contoh 14

Lukislah grafik fungsi $f(x) = |x^2 - 4|$



Jawab :

Kita lukis dahulu grafik fungsi $y = x^2 - 4$ dengan membuat tabel seperti di bawah ini, setelah itu kita cerminkan grafik di bawah sumbu x dengan cermin sumbu x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

d). Fungsi Polinomial

Fungsi Polinomial adalah fungsi f yang dinyatakan dalam bentuk :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Jika $n = 1$ maka terbentuk fungsi linier (grafiknya berbentuk garis lurus).

Jika $n = 2$ maka terbentuk fungsi kuadrat (grafiknya berbentuk parabola).

e). Fungsi Genap

Fungsi genap adalah suatu fungsi f dimana berlaku $f(x) = f(-x)$. Yang merupakan fungsi genap antara lain fungsi yang pangkat-pangkat dari variabelnya bilangan genap. Jika fungsi itu pecahan, maka dapat dikatakan fungsi genap jika variabel pada pembilang dan penyebut berpangkat semua genap atau semua ganjil.

f). Fungsi Ganjil

Fungsi ganjil adalah suatu fungsi f dimana berlaku $f(-x) = -f(x)$. Yang merupakan fungsi ganjil antara lain fungsi yang semua variabelnya berpangkat ganjil. Jika fungsi itu pecahan, maka dapat dikatakan fungsi ganjil jika variabel pada pembilang berpangkat ganjil dan variabel dari penyebut berpangkat genap atau sebaliknya.

Contoh 15

Selidikilah fungsi di bawah ini fungsi genap, fungsi ganjil atau bukan kedua duanya:

a. $f(x) = x^2 - 4$

b. $f(x) = 3x + 5$

c. $f(x) = 3x^3 + 5x$

d. $f(x) = \frac{2x^4 - 2}{x^2 + 5}$

e. $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 6}{x^3 + 5x}$

Jawab:

a. Semua variabel berpangkat genap, yaitu 2 dan 0 jadi termasuk fungsi genap

b. Variabel ada yang berpangkat ganjil yaitu 1 dan berpangkat genap yaitu 0, jadi bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil.

c. Semua variabel berpangkat ganjil, jadi merupakan fungsi ganjil.

- d. Semua variabel dari pembilang dan penyebut berpangkat genap, jadi merupakan fungsi genap.
- e. Semua variabel pembilang berpangkat genap dan semua variabel penyebut berpangkat ganjil, jadi merupakan fungsi ganjil.

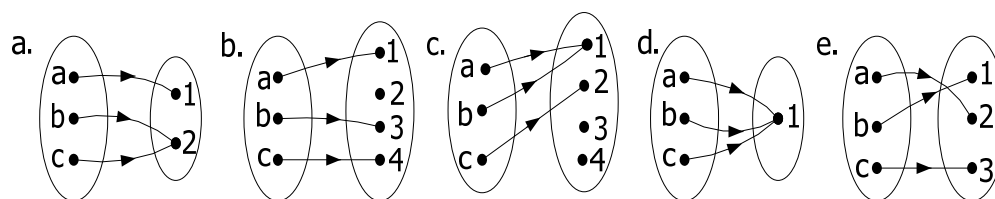
6). Sifat-sifat fungsi

Berdasarkan sifatnya fungsi terbagi menjadi :

- a. Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang setiap elemen daerah hasil (R_f) merupakan bayangan paling sedikit dari daerah kodomain (K_f)
Kalimat tersebut secara matematika diartikan :
Misal $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi. Jika $R_f = B$ atau daerah hasil dari fungsi f sama dengan kodomain f , maka f adalah fungsi subyektif atau pada.
- b. Fungsi Injektif adalah suatu fungsi yang setiap elemen domain (D_f) memiliki pasangan yang berbeda pada kodomain (K_f),
Kalimat tersebut secara matematika diartikan :
Misal $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi dan R_f adalah daerah hasil f .
Bila x_1 dan x_2 adalah sembarang dua elemen pada D_f , jika $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dan jika $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$, maka $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu.
- c. Fungsi bijektif adalah korespondensi satu-satu, yaitu suatu fungsi yang setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain dan setiap anggota kodomain merupakan pasangan dari satu dan hanya satu anggota domain

Contoh 16

Dari diagram panah di bawah ini, manakah yang merupakan fungsi surjektif, fungsi injektif dan fungsi bijektif.



Jawab:

Diagram panah a merupakan fungsi surjektif karena elemen Range sama dengan elemen Kodomain

Diagram panah b merupakan fungsi injektif karena banyaknya elemen domain sama dengan banyaknya elemen range

Diagram panah c bukan merupakan fungsi surjektif, injektif atau bijektif

Diagram panah d merupakan fungsi surjektif karena elemen Range sama dengan elemen kodomain

Diagram panah e merupakan fungsi bijektif karena elemen Range sama dengan elemen kodomain

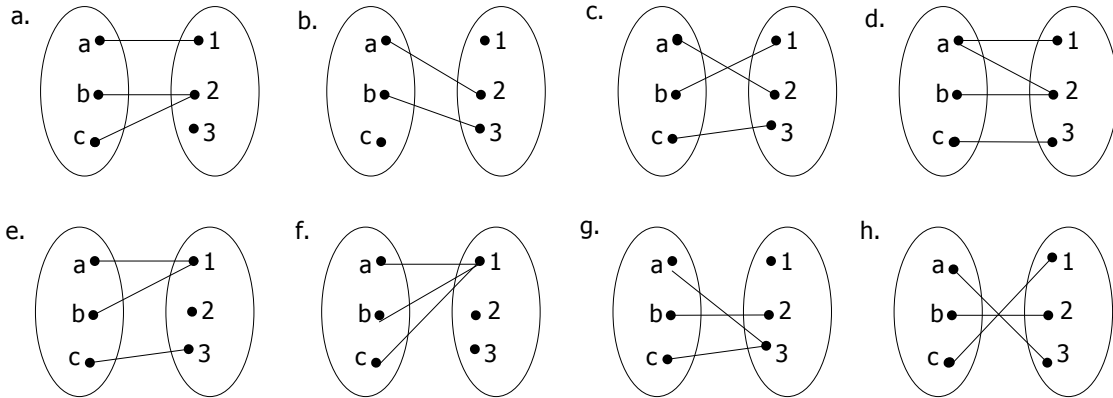
c. Rangkuman

1. Relasi dari dua himpunan A dan B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota B. Relasi antara dua himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan :
 - a. Diagram Panah
 - b. Diagram Cartesius
 - c. Pasangan Berurutan.
2. Pada relasi dari himpunan A ke B, himpunan A disebut Domain (daerah asal) himpunan B disebut Kodomain (daerah kawan) dan semua anggota B yang mendapat pasangan dari A disebut (daerah hasil).
3. Pemetaan atau fungsi adalah relasi khusus dari himpunan A ke B dimana setiap anggota A tepat memiliki pasangan dengan anggota B
4. Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B = b adalah b^a
5. Pemetaan khusus yang terjadi jika setiap anggota A dipasangkan tepat satu ke anggota B dan anggota B dipasangkan tepat satu dengan anggota A disebut *Korespondensi Satu-satu Pada*. Korespondensi satu-satu akan mungkin terjadi jika banyaknya anggota A = banyaknya anggota B
6. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A atau B = n adalah $n!$ dengan $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$
7. Berdasarkan sifatnya fungsi terbagi menjadi :
 - a. Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang elemen daerah hasilnya (R_f) sama dengan elemen daerah kodomain (K_f). nama lain fungsi surjektif adalah fungsi onto atau fungsi kepada
 - b. Fungsi Injektif adalah suatu fungsi yang setiap domain memiliki pasangan yang berbeda pada kodomain, atau banyaknya anggota domain (D_f) sama dengan banyaknya anggota range (R_f)
 - c. Fungsi bijektif adalah korespondensi satu-satu pada, yaitu suatu fungsi yang setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain dan setiap anggota kodomain merupakan pasangan dari satu dan hanya satu anggota domain

LATIHAN**1**

1. Relasi-relasi dari himpunan A = {a,b,c} ke B = {1,2,3} digambarkan dengan himpunan pasangan sebagai berikut. Relasi manakah yang merupakan fungsi?
 - a. {(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 1), (b, 3)}
 - b. {(a, 2), (b, 2), (c, 2)}
 - c. {(a, 3), (b, 1), (b, 2)}
 - d. {(a, 1), (b, 3), (c, 2)}
 - e. {(a, 1), (b, 1), (c, 2)}

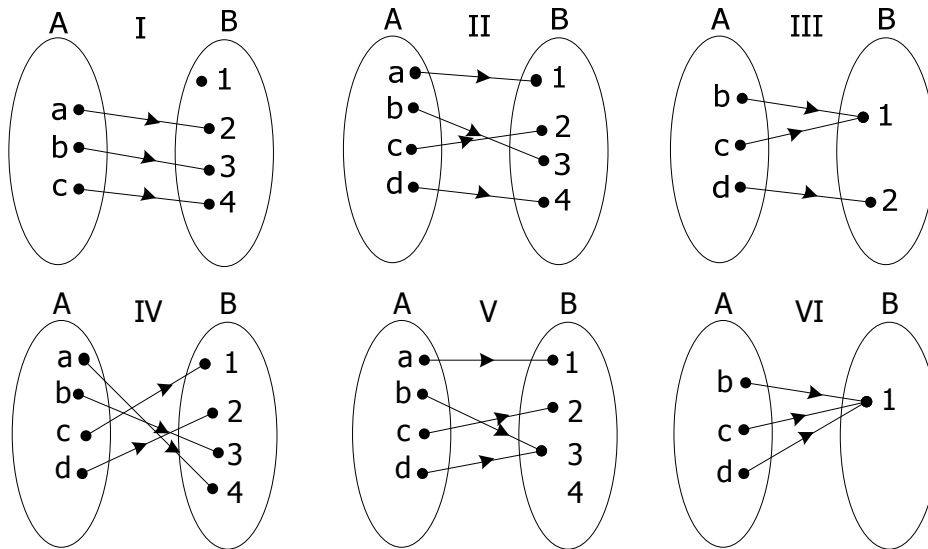
2. Relasi-relasi dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ ke $B = \{1, 2, 3\}$ digambarkan dengan diagram panah sebagai berikut. Relasi manakah yang merupakan fungsi?



3. Jika $A = \{0, 1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 Relasi yang menghubungkan himpunan A ke B adalah "Tiga kurangnya dari"
 Buatlah :
 a. Diagram panah.
 b. Diagram cartesius.
 c. Himpunan pasangan berurutan.
 d. Ada berapa banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B dan dari B ke A
4. Diketahui himpunan $A = \{2, 3, 5, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Relasi yang menghubungkan himpunan A ke himpunan B adalah "satu kurangnya dari"
 a. Buatlah diagram panah, diagram cartesius dan himpunan pasangan berurutannya
 b. Ada berapa pemetaan yang mungkin terjadi dari B ke A
5. Suatu relasi dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan $\{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ Tentukan Domain, Kodomain dan Rangnya
6. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow f(x)$ yang dirumuskan sebagai $f(x) = 2x - 3$, tentukanlah:
 a. Nilai $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ dan $f(2)$
 b. Jika $f(a) = 7$ tentukan nilai a
 c. Jika $f(x) = -5$ tentukan nilai x
7. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow f(x)$ dirumuskan sebagai $f(x) = 2x^2 - 5$, tentukan:
 a. Nilai $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ dan $f(3)$
 b. Gambarlah dalam diagram cartesius
 c. Jika $f(a) = 3$ tentukan nilai a
 d. Jika $f(x) = 45$ tentukan nilai x
8. Jika $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{p, q, r, s, t\}$ dan $D = \{2, 4, 5, 4, 7\}$
 a. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari A ke B
 b. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari C ke A
 c. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari D ke B

- d. Ada berapa korespondensi satu-satu yang mungkin dari C ke D
 e. Mungkinkah terjadi korespondensi satu-satu dari A ke C, mengapa?
9. Jika $f : x \rightarrow 3x - 1$. Tentukan daerah hasil yang domainnya adalah $\{0, 1, 2, 3\}$. Kemudian buatlah diagram panah, diagram cartesius serta himpunan pasangan berurutan
10. Tentukan domainnya sehingga fungsi di bawah ini memberikan nilai bilangan real
- | | |
|------------------------|---------------------------------------|
| a. $y = x^2 + 4$ | d. $y = \frac{2}{x}$ |
| b. $y = 5x - 1 $ | e. $y = \frac{2x - 5}{x^2 + 4x - 12}$ |
| c. $y = \sqrt{3x + 5}$ | f. $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ |
11. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dengan himpunan pasangan berurutan berikut ini manakah yang merupakan fungsi onto, injektif atau bijektif Jika domain $A = \{a, b, c, d\}$ dan kodomain $B = \{1, 2, 3, 4\}$?
- | | |
|---|---|
| a. $\{(a, 1), (b, 1), (c, 3), (d, 4)\}$ | d. $\{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2)\}$ |
| b. $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)\}$ | e. $\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$ |
| c. $\{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 4)\}$ | |
12. Jika $g : x \rightarrow 2x^2 + 1$ domainnya $\{-2 \leq x \leq 2, x \in B\}$, tentukanlah daerah hasil dan buatlah diagram cartesiusnya.
13. Diketahui $f(x) = ax + b$. dengan $f(2) = 9$ dan $f(0) = -1$ Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya.
14. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 3x$. tentukanlah nilai dari: $f(-3)$, $f(4)$, $f(0)$ dan $f(\frac{1}{2})$
15. Diketahui $f(x) = ax + b$. dengan $f(3) = 4$ dan $f(-2) = -11$ Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya
16. Selidiki fungsi di bawah ini fungsi genap, fungsi ganjil atau bukan kedua duanya:
- | | |
|---|---|
| a. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ | d. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 2}{x^3 + 5x}$ |
| b. $f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2}{x^4 + 3}$ | e. $f(x) = \frac{x^5 - x^3 + 6x}{8x^7 + x}$ |
| c. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - x$ | f. $f(x) = 2x^4 + 5x^2$ |
17. Lukislah grafiknya dari fungsi di bawah ini :
- | |
|--------------------------|
| a. $y = x + 5 $ |
| b. $y = 6 - 3x $ |
| c. $y = x^2 - 6x - 16 $ |
| d. $y = 9 - x^2 $ |
| e. $y = 3x - x^2 $ |

18. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dengan diagram panah berikut ini manakah yang merupakan fungsi onto, injektif atau bijektif, jika relasi dari A ke B ?



B.2 Konsep Fungsi Linier

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Membuat grafik fungsi linier.
- Menentukan persamaan grafik fungsi linier yang melalui dua titik, melalui satu titik dan gradien tertentu, dan jika diketahui grafiknya.
- Menemukan syarat hubungan dua grafik fungsi linier saling sejajar dan saling tegak lurus
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan fungsi Linier

b. Uraian Materi

1). Pengertian fungsi linier

Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu fungsi linier sering disebut dengan *persamaan garis lurus (pgl)* dengan bentuk umumnya sbb.:

$$f : x \rightarrow mx + c \quad \text{atau} \quad f(x) = mx + c \quad \text{atau} \quad y = mx + c$$

m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta

Contoh 17

Fungsi linier

- $f : x \rightarrow 2x + 5$
- $f(x) = 5x - 10$
- $y = x - 7$
- $3y + 4x = 12$
- $y = 5$

bukan fungsi linier

- $y = x^2 + 1$
- $\frac{2}{y} = x$
- $5xy + y = 10$

2). Melukis grafik fungsi linier

Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier

- a Tentukan titik potong dengan sumbu x, $y = 0$ diperoleh koordinat A(x_1 , 0)
- b Tentukan titik potong dengan sumbu y, $x = 0$ diperoleh koordinat B(0, y_1)
- c hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus

Contoh 18

Lukislah grafik dari $y = 2x - 6$

Jawab:

Titik potong dengan sumbu x $\rightarrow y = 0$

$$y = 2x - 6$$

$$0 = 2x - 6$$

$$6 = 2x$$

$$x_1 = 3 \rightarrow (3, 0)$$

Titik potong dengan sumbu y $\rightarrow x = 0$

$$y = 2x - 6$$

$$y = 2 \cdot 0 - 6$$

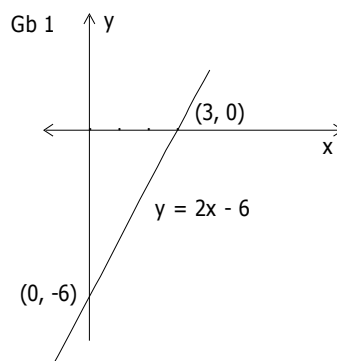
$$y_1 = -6 \rightarrow (0, -6)$$

sehingga diperoleh tabel :

x	3	0
y	0	-6
(x, y)	(3, 0)	(0, -6)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 1*.

Untuk lukisan selanjutnya cukup dibuat tabel seperti di atas



Contoh 19

Lukislah grafik dari $y = 8 - 4x$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	2	0
y	0	8
(x, y)	(2, 0)	(0, 8)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 2*



Contoh 20

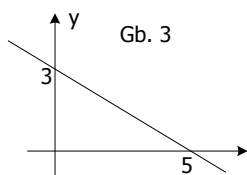
Lukislah grafik dari $3x + 5y = 15$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	5	0
y	0	3
(x, y)	(5, 0)	(0, 3)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 3*



Contoh 21

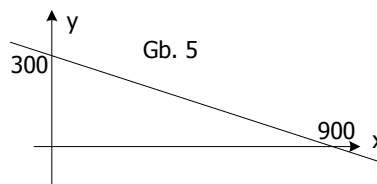
Lukislah grafik dari $x = 900 - 3y$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	900	0
y	0	300
(x, y)	(900, 0)	(0, 300)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 5*



Contoh 22

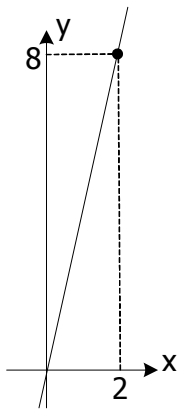
Lukislah grafik dari $y = 4x$

Jawab:

Fungsi di atas grafiknya memotong titik pangkal $(0, 0)$ karena tidak ada konstanta jadi untuk melukisnya hanya butuh satu titik saja, misal $x = 2$ maka $y = 2 \cdot 4 = 8$ sehingga tabelnya sebagai berikut.

x	0	2
y	0	8
(x, y)	(0, 0)	(2, 8)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 4*



Gb. 4

Contoh 23

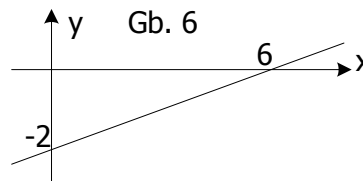
Lukislah grafik dari $y = \frac{1}{3}x - 2$

Jawab:

Persamaan fungsi di atas memuat pecahan, untuk menghilangkan pecahan kalikan dengan 3 sehingga diperoleh persamaan $3y = x - 6$, dengan langkah di atas diperoleh tabel sebagai berikut:

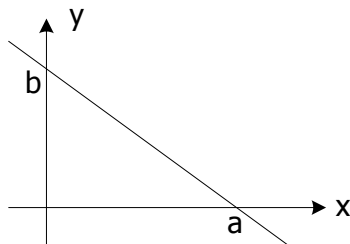
x	6	0
y	0	-2
(x, y)	(6, 0)	(0, -2)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 6*

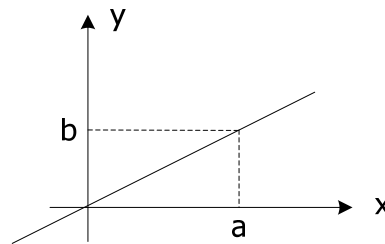


Gb. 6

3). *Membuat persamaan garis lurus dari grafiknya*



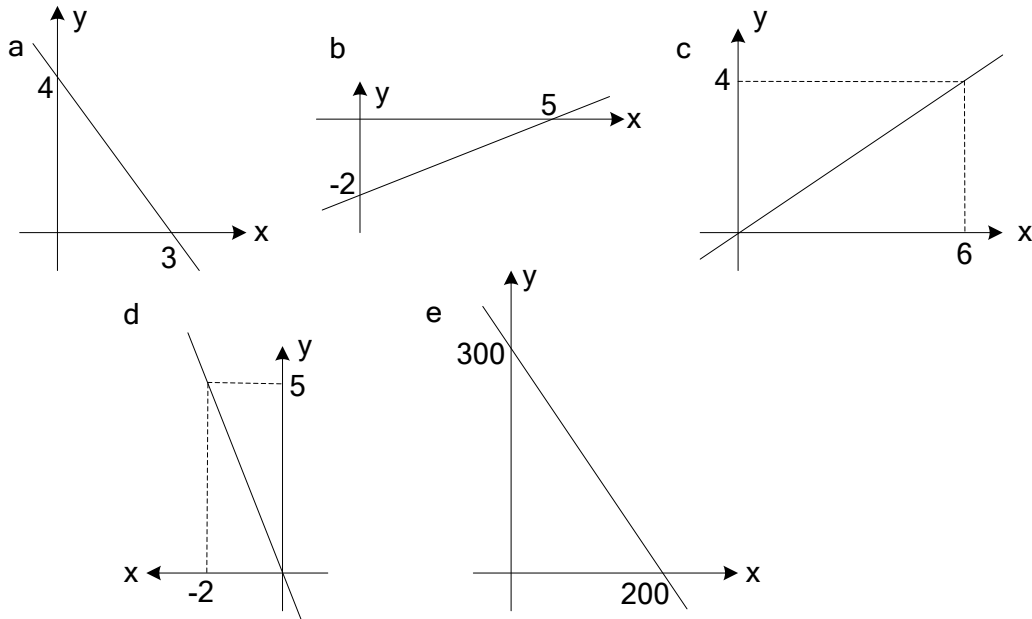
Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $bx + ay = ab$



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $y = \frac{b}{a}x$

Contoh 24

Tentukanlah persamaan garisnya dari grafik di bawah ini



Jawab:

- | | |
|--|--|
| <p>a. $a = 3, b = 4$, maka persamaan fungsinya
 $4x + 3y = 3.4$
 $4x + 3y = 12$</p> <p>b. $a = 5, b = -2$, maka persamaan fungsinya
 $-2x + 5y = -2.5$
 $-2x + 5y = -10$ atau $2x - 5y = 10$</p> <p>c. $a = 6, b = 4$, maka persamaan fungsinya
 $y = \frac{4}{6}x$
 $6y = 4x$
 $3y = 2x$ atau $2x - 3y = 0$</p> | <p>d. $a = -2, b = 5$, maka persamaan fungsinya
 $y = \frac{5}{-2}x$
 $-2y = 5x$ atau $5x + 2y = 0$</p> <p>e. $a = 200, b = 300$, maka persamaan fungsinya
 $300x + 200y = 60.000$
 $3x + 2y = 600$</p> |
|--|--|

4). *Gradien dan persamaan garis lurus*

a). Garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ memiliki gradien m :

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ atau } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 25

Tentukan gradien dari garis lurus yang melalui titik-titik:

- a. $A(2, 4)$ dan $B(3, 8)$
- b. $P(-2, 1)$ dan $Q(4, -11)$

Jawab:

a. $A(2, 4)$ berarti, $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$ dan $B(3, 8)$ berarti $x_2 = 3$ dan $y_2 = 8$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = 4$$

b. P(-2, 1) berarti $x_1 = -2$ dan $y_1 = 1$ dan B(4, -11) berarti $x_2 = 4$ dan $y_2 = -11$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11 - 1}{4 - (-2)} = \frac{-12}{6} = -2$$

b. Persamaan garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 26

Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3, -4) dan (-2, 6)

Jawab:

$x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $x_2 = -2$ dan $y_2 = 6$, maka persamaan fungsi linier atau persamaan garis lurusnya adalah:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \Leftrightarrow -5(y + 4) &= 10(x - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{y - (-4)}{6 - (-4)} &= \frac{x - 3}{-2 - 3} & \Leftrightarrow -5y - 20 &= 10x - 30 \quad \text{di bagi } -5 \\ \Leftrightarrow \frac{y + 4}{10} &= \frac{x - 3}{-5} & \Leftrightarrow y + 4 &= -2x + 6 \\ & & \Leftrightarrow y + 2x + 4 - 6 &= 0 \\ & & \Leftrightarrow y + 2x - 2 &= 0 \quad \text{atau} \\ & & \Leftrightarrow y + 2x &= 2 \quad \text{atau} \\ & & \Leftrightarrow y &= -2x + 2 \end{aligned}$$

Contoh 27

Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3, 1) dan (-5, 5)

Jawab:

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $x_2 = -5$ dan $y_2 = 5$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \Leftrightarrow -8(y - 1) &= 4(x - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{y - 1}{5 - 1} &= \frac{x - 3}{-5 - 3} & \Leftrightarrow -8y + 8 &= 4x - 12 \quad \text{dibagi } -4 \\ \Leftrightarrow \frac{y - 1}{4} &= \frac{x - 3}{-8} & \Leftrightarrow 2y - 2 &= -x + 3 \\ & & \Leftrightarrow 2y + x - 2 - 3 &= 0 \\ & & \Leftrightarrow 2y + x - 5 &= 0 \quad \text{atau} \\ & & \Leftrightarrow 2y + x &= 5 \end{aligned}$$

c. Persamaan garis lurus (pgl) yang bergradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Contoh 28

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien 2 dan melalui titik (-3, 1)

Jawab:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y &= m(x - x_1) + y_1 \\ \Leftrightarrow y &= 2(x - (-3)) + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2(x + 3) + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 6 + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 7 \end{aligned}$$

Contoh 29

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien $-\frac{2}{3}$ dan melalui $(-6, 2)$

Jawab:

$$\Leftrightarrow y = m(x - x_1) + y_1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}(x - (-6)) + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}(x + 6) + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - 2 \quad \text{atau kali 3}$$

$$\Leftrightarrow 3y = -2x - 6 \text{ atau } 3y + 2x + 6 = 0$$

5). Menentukan gradien dari persamaan garis lurus (pgl)

- Persamaan garis lurus : $ax + by = c$ maka gradiennya $m = -\frac{a}{b}$
- Persamaan garis lurus : $y = ax + b$ maka $m = a$
- Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan $y = c$ dan $m = 0$
- Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan $x = c$ dan tidak memiliki gradien

Contoh 30

a gradien dari Pgl : $2x + y = 5$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$

b gradien dari pgl : $-4x + 2y - 2 = 0$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{-4}{2} = 2$

c gradien dari pgl : $-3y + 2x + 3 = 0$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

d gradien dari pgl : $y = 4x + 1$ adalah $m = 4$

e gradien dari pgl : $y = -10$ adalah $m = 0$

6). Titik potong dua buah garis

Menentukan titik potong dua buah garis lurus *identik* dengan menyelesaikan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eliminasi, metode substitusi maupun metode grafik

Contoh 31

Tentukan titik potong persamaan garis : $y = 3x + 5$ dan $y = -2x + 15$

Jawab:

Eliminasi y,

$$y = 3x + 5$$

$$\underline{y = -2x + 15 -}$$

$$0 = 5x - 10$$

$$5x = 10 \leftrightarrow x = 2$$

substitusi $x = 2$ ke $y = 3x + 5$

$$y = 2 \cdot 3 + 5$$

$y = 11$ Jadi titik potong kedua garis di atas adalah $(2, 11)$

Contoh 32

Tentukan titik potong persamaan garis : $5x - 3y = 9$ dan $7x - 6y = 9$

Jawab:

Eliminasi y ,

$$5x - 3y = 9 \quad | \times 2 \quad | \quad 10x - 6y = 18$$

$$7x - 6y = 9 \quad | \times 1 \quad | \quad 7x - 6y = 9 -$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

substitusi $x = 3$ ke $5x - 3y = 9$

$$5(3) - 3y = 9$$

$$-3y = 9 - 15$$

$$y = 2$$

Jadi titik potong kedua garis di atas adalah $(3, 2)$

7). Hubungan dua buah garis

Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$

Contoh 33

Dari beberapa persamaan garis di bawah ini, manakah yang saling sejajar dan berpotongan tegak lurus.

I. $2x + y - 4 = 0$

II. $y = -2x + 1$

III. $2y - x = 8$

IV. $3y + 2x + 1 = 0$

V. $y = \frac{3}{2}x$

VI. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Jawab:

$$m_I = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2, \quad m_{II} = -\frac{a}{b} = -2, \quad m_{III} = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$m_{IV} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}, \quad m_V = \frac{3}{2} \text{ dan } m_{VI} = \frac{2}{3}$$

I dan II saling sejajar karena gradiennya sama, yaitu $m = -2$

I dan III, IV dan V berpotongan tegak lurus karena $m_I \cdot m_{III} = -1$ dan $m_{IV} \cdot m_V = -1$

Contoh 34

Tentukan persamaan garis yang sejajar garis $y - 3x + 1 = 0$ dan melalui titik $(2, -4)$

Jawab:

$y - 3x + 1 = 0$ maka $m_1 = -\frac{-3}{1} = 3$ karena sejajar maka $m_1 = m_2$ jadi $m_2 = 3$

$$\Leftrightarrow y = m_2 (x - x_1) + y_1$$

$$\Leftrightarrow y = 3 (x - 2) + (-4)$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - 6 - 4$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - 10$$

Contoh 35

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $2y + x = 1$ melalui titik pangkal $(0, 0)$

Jawab:

$2y + x + 1 = 0$ maka $m_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$

karena tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-0,5} = 2$, jadi persamaan garisnya adalah:

$$\Leftrightarrow y = m_2 (x - x_1) + y_1$$

$$\Leftrightarrow y = 2(x - 0) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

Contoh 36

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = -\frac{1}{4}x$ dan melalui titik potong persamaan garis $y = -x + 4$ dan garis $y = 3x - 8$

Jawab:

$y = -\frac{1}{4}x$ maka $m_1 = -\frac{1}{4}$ karena tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$ diperoleh $m_2 = 4$

Menentukan titik potong persamaan garis : $y = -x + 4$ dan garis $y = 3x - 8$ dengan metode substitusi diperoleh:

$$-x + 4 = 3x - 8$$

$$-4x = -12 \Leftrightarrow x = 3$$

substitusikan nilai $x = 3$ ke persamaan 1 atau 2 diperoleh $y = 1$ sehingga titik potong kedua garis tersebut adalah $(3, 1)$. Persamaan garis yang akan dibuat adalah bergradien $m = 4$ dan melalui $(3, 1)$, yaitu

$$y = m_2 (x - x_1) + y_1$$

$$y = 4 (x - 3) + 1$$

$$y = 4x - 12 + 1$$

$$y = 4x - 11$$

LATIHAN

2

1. Lukislah grafik garis lurus di bawah ini:

a $y = 3x + 6$

f $3x - 2y = 900$

b $y = 12 - 3x$

g $y - 2x = 0$

c $2x + 5y = 10$

h $y - 3x + 6 = 0$

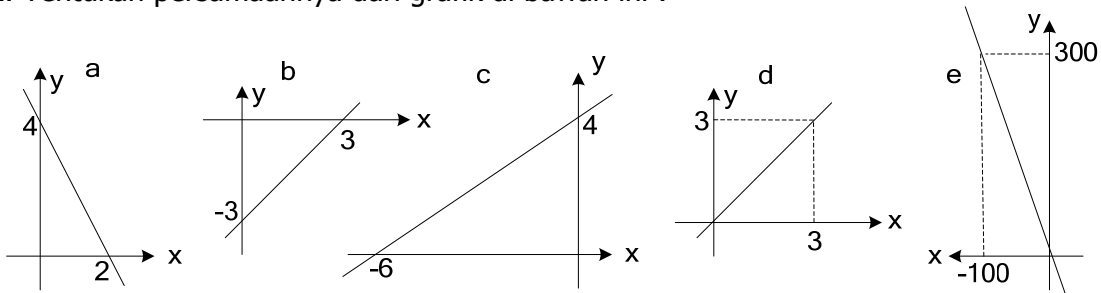
d $y = -2x$

i $360y + 240x = 42.000$

e. $y = \frac{1}{2}x$

j. $y = \frac{1}{2}x + 4$

2. Tentukan persamaannya dari grafik di bawah ini :



3. Tentukanlah gradiennya dari garis lurus yang melalui titik-titik di bawah ini:

a $(-4, 5)$ dan $(4, -1)$

b $(3, -5)$ dan $(-3, 5)$

c $(-2, 4)$ dan $(4, 5)$

d $(2, 6)$ dan $(-4, 6)$

e $(4, -2)$ dan $(4, 8)$

4. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik di bawah ini:

a $(2, 5)$ dan $(5, 8)$

b $(4, -1)$ dan $(-2, 11)$

c $(4, 3)$ dan $(-1, -4)$

d $(-2, 4)$ dan $(-2, 8)$

5. Tentukanlah gradien garis yang memiliki persamaan:

a $y = -3x + 2$

d $y = x + 4$

b $3x - y + 6 = 0$

e $x + y = -5$

c. $\frac{2}{3}x + 3y + 9 = 0$

f. $-\frac{4}{5}x - 2y + 1 = 0$

6. Tentukanlah persamaan garis yang diketahui sebagai berikut:

a Gradien $m = -4$ dan melalui $(2, 5)$

b gradient $m = 2$ dan melalui $(-4, 5)$

c Gradien $m = -\frac{1}{3}$ dan melalui titik pangkal

d Gradien $m = \frac{1}{2}$ dan melalui $(-6, 1)$

7. Selidiki apakah dua garis berpotongan tegak lurus, sejajar atau tidak duanya:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a. $4y - 2x = 0$ | d. $3x - 9y + 1 = 0$ |
| $2y - x - 6 = 0$ | $y = 1/3 x - 1$ |
| b. $2y - x - 4 = 0$ | e. $2y - x + 8 = 0$ |
| $2y + 6x - 7 = 0$ | $8y - 4x - 24 = 0$ |
| c. $2y - x = 6$ | f. $2y = 3x + 4$ |
| $y = -2x + 10$ | $-2y + 3x = 1$ |

8. Tentukan persamaan garis lurus yang :

- sejajar garis $x + y + 1 = 0$ dan melalui titik (1,2)
- tegak lurus garis $x + 5y = 0$ dan melalui titik (-3, 6)

9. Tentukanlah persamaan garis lurus yang diketahui sebagai berikut :

- Melalui dua titik (2, -4) dan (5, 5)
- Bergradien -5 dan melalui titik pangkal
- Bergradien 3 dan melalui (-5,-1)
- Melalui (8, -4) dan titik pangkal
- Sejajar garis: $y = 3x + 3$ dan melalui (-2, 4)
- Tegak lurus : $3y - x + 8 = 0$ dan melalui (3, -1)

10. Lukis garis $y = 3x - 9$ dan $x + 2y = 10$ dan tentukanlah titik potongnya.

11. Tentukan persamaan garis yang sejajar garis $5x - y = 2$ dan melalui titik potong dua garis $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 7$.

12. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = 4x$ dan melalui titik potong dua garis $x + 2y - 10 = 0$ dan $2x - y - 15 = 0$

8). Aplikasi fungsi linier dalam bidang ekonomi

a). Fungsi Permintaan

Dalam dunia bisnis, dikenal tentang hukum ekonomi, yaitu jika harga suatu barang naik maka permintaan terhadap barang tersebut menurun, sebaliknya jika harga suatu barang turun maka permintaan terhadap barang tersebut naik.

Secara matematika, harga barang merupakan fungsi dari permintaan. Fungsi permintaan yang paling sederhana adalah fungsi permintaan linier dengan bentuk umum fungsi permintaan sebagai berikut:

$$P = P_0 + m x$$

Dengan P = harga satuan per unit

P_0 = harga barang tertinggi saat $x = 0$ ($P_0 > 0$)

x = jumlah barang ($x \geq 0$)

m = gradien fungsi dengan a selalu bernilai negatif ($m < 0$)

Kurva permintaan selalu di kuadran I dan turun dari kiri atas ke kanan bawah

Perhatikan gambar II.a

b). Fungsi Penawaran

Dalam dunia bisnis, juga dikenal tentang hukum penawaran, yaitu jika harga suatu barang naik maka jumlah barang yang ditawarkan juga ikut naik, sebaliknya jika harga barang turun maka penawaran terhadap barang tersebut juga turun.

Secara matematika, harga barang merupakan fungsi juga dari penawaran. Fungsi penawaran yang paling sederhana adalah fungsi penawaran linier dengan bentuk umum fungsi penawaran sebagai berikut:

$$P = P_0 + m x$$

Dengan P = harga satuan per unit

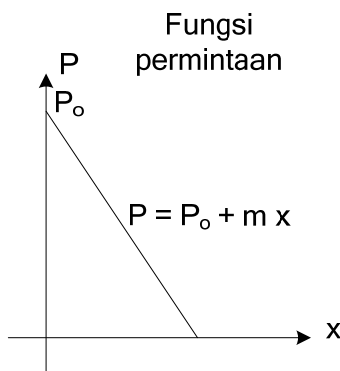
P_0 = harga barang terendah saat $x = 0$ ($P_0 > 0$)

x = jumlah barang ($x \geq 0$)

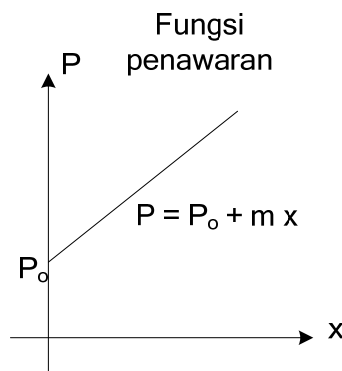
m = gradien fungsi dengan a selalu bernilai positif ($m > 0$)

Kurva penawaran selalu di kuadran I dan naik dari kiri bawah ke kanan atas.

Perhatikan gambar II.b



Gambar II.a : Fungsi permintaan



Gambar II.b : Fungsi penawaran

Contoh 37

Dari fungsi linier di bawah ini, manakah yang termasuk fungsi permintaan dan fungsi penawaran.

a. $P = -4x + 400$

c. $P = 2x + 10$

b. $P - 3x = 600$

d. $P + 10x = 1.000$

Jawab:

a. $P = -4x + 400$ merupakan fungsi permintaan karena nilai gradiennya -4 ($m < 0$)

b. $P - 3x = 600$ merupakan fungsi penawaran karena nilai gradiennya 3 ($m > 0$)

c. $P = 2x + 10$ merupakan fungsi penawaran karena nilai gradiennya 2 ($m > 0$)

d. $P + 10x = 1.000$ merupakan fungsi permintaan karena nilai $m = -10$ ($m < 0$)

Contoh 38

Harga tertinggi pada fungsi permintaan suatu barang adalah Rp8.000,00. Jika pada saat harganya Rp6.000 jumlah barang yang diminta adalah 500 unit.

a. Tentukan fungsi permintaan liniernya

b. Lukis kurva permintaannya

Jawab:

a. $P_0 = 8.000$, $P = 6.000$ dan $x = 500$ disubstitusikan ke fungsi permintaan

$P = P_0 + m x$ diperoleh:

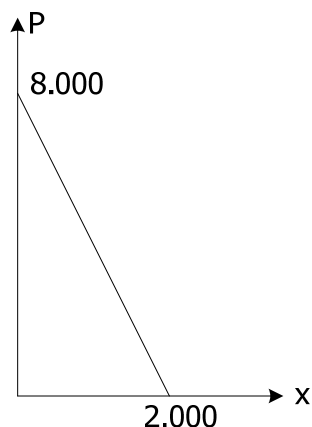
$$6.000 = 8.000 + m \cdot 500$$

$$500 m = - 2.000 \Leftrightarrow m = -4$$

Jadi fungsi permintaannya: $P = -4x + 8.000$

- b. Dengan menggunakan prinsip melukis fungsi linier, maka kurva $P = -4x + 8.000$ dapat dilukis sebagai berikut:

P	0	2.000
x	8.000	0



Contoh 39

Dalam suatu hukum penawaran suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp900,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 20 unit, dan jika harga barang Rp1.200,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 50 unit.

- Tentukan rumus fungsi penawarannya
- Jika Jumlah barang yang ditawarkan 1.000 unit, tentukan harga barang tersebut.

Jawab:

- Fungsi penawaran linier dirumuskan sebagai berikut:

$$P = P_0 + m x$$

$$\text{Untuk } P = 900 \text{ dan } x = 20 \text{ diperoleh persamaan: } 900 = P_0 + 20 m \quad \dots 1)$$

$$\text{Untuk } P = 1.200 \text{ dan } x = 50 \text{ diperoleh persamaan: } 1.200 = P_0 + 50 m \quad \dots 2)$$

Dari 1) dan 2) jika P_0 di eliminasikan, diperoleh:

$$1200 = P_0 + 50m$$

$$\underline{900 = P_0 + 20m \quad -}$$

$$300 = 30 m \Leftrightarrow m = 10,$$

substitusikan nilai $m = 10$ ke 1) diperoleh:

$$900 = P_0 + 20 m$$

$$900 = P_0 + 200 \Leftrightarrow P_0 = 700$$

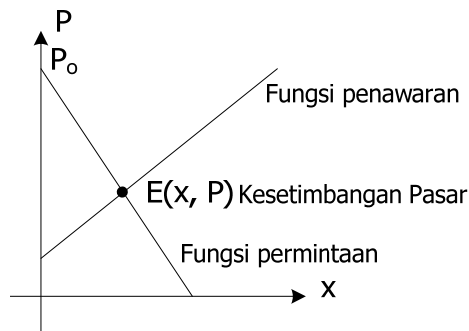
Jadi fungsi penawarannya: $P = 10x + 700$

- $P = 10 \cdot 1.000 + 700$
 $= \text{Rp}10.700,00$

c). Titik Keseimbangan Pasar

Pasar merupakan tempat bertemunya penjual dan pembeli untuk mengadakan transaksi jual beli. Oleh karena itu akan terjadi tawar-menawar antara penjual dan pembeli. Harga pasar atau sering disebut dengan keseimbangan pasar akan terjadi bila harga yang diminta konsumen sesuai dengan harga yang ditawarkan produsen.

Secara matematika, keseimbangan pasar terjadi apabila kurva permintaan dan kurva penawaran berpotongan pada sebuah titik yang dinamakan titik keseimbangan pasar. Dalam bentuk grafik:



Gambar II.c : Titik keseimbangan

Menentukan titik keseimbangan pasar diperoleh dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel x dan P

Contoh 40

Tentukan titik keseimbangan pasarnya dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran di bawah ini:

a. Fungsi permintaan: $P = -2x + 600$
 Fungsi penawaran: $P = 3x + 100$

b. Fungsi permintaan: $2P + 5x = 1.500$
 Fungsi penawaran: $3P - 4x = 1.100$

Jawab:

a. Harga penawaran = harga permintaan

$$3x + 100 = -2x + 600$$

$$3x + 2x = 600 - 100$$

$$5x = 500$$

$$x = 100$$

Harga penawaran: $P = 3x + 100$

$$P = 3 \cdot 100 + 100 = 400$$

Jadi titik kesimbangan pasar terjadi pada saat harga Rp400 dan jumlah barang yang diminta atau ditawarkan sebanyak 100 unit

b. $2P = -5x + 1.500 \Leftrightarrow P = -\frac{5}{2}x + 750$

$$3P = 4x + 1.100 \Leftrightarrow P = \frac{4}{3}x + \frac{1.100}{3}$$

Harga penawaran = harga permintaan

$$\frac{4}{3}x + \frac{1.100}{3} = -\frac{5}{2}x + 750 \quad (\text{kalikan } 6)$$

$$8x + 2.200 = -15x + 4.500$$

$$8x + 15x = 4.500 - 2.200$$

$$23x = 2.300$$

$$x = 100$$

Harga penawaran: $3P = 4x + 1.100$
 $3P = 4 \cdot 100 + 1.100$
 $P = 500$

Jadi titik kesimbangan pasar terjadi pada saat harga Rp500 dan jumlah barang yang diminta atau ditawarkan sebanyak 100 unit

d). Titik pulang pokok (*Break even point*)

Suatu perusahaan dalam memproduksi barang tentu akan memerlukan biaya, yaitu biaya tetap (upah karyawan, biaya gedung, bunga kredit bank dan lain-lain) dan biaya variabel (biaya yang diperlukan dalam proses produksi).

Dalam suatu usaha yang dijalankan, suatu perusahaan akan terjadi kemungkinan:

Jika pendapatan yang diterima melebihi biaya total (biaya variabel + biaya tetap) yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan untung.

Jika pendapatan yang diterima kurang dari biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan rugi.

Jika pendapatan yang diterima sama dengan biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan dalam kondisi tidak rugi. Kondisi seperti ini disebut dengan titik pulang pokok atau untung maupun *break even point*

Contoh 41

CV SEJAHTERA memproduksi mainan anak-anak dengan biaya Rp6.500,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp17.500.000,00. Jika mainan akan dijual Rp10.000,00/tiap unit, tentukan:

- Jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan, tentukan fungsi biayanya.
- Jumlah mainan yang harus terjual agar terjadi *break even point*
- Jumlah mainan yang harus terjual agar perusahaan untung Rp17.500.000,00

Jawab:

a. $B = \text{Biaya variabel} + \text{biaya tetap}$
 $B = 6.500x + 17.500.000$

b. *Break even point* terjadi jika: Biaya total = pendapatan

$$6.500x + 17.500.000 = 10.000x$$

$$17.500.000 = 10.000x - 6.500x$$

$$x = \frac{17.500.000}{3.500} = 5.000$$

Jumlah mainan yang harus terjual agar terjadi *break even point* adalah 5.000 unit

$$\begin{aligned}
 \text{c.} \quad & \text{Untung} = \text{pendapatan} - \text{biaya total} \\
 & 17.500.000 = 10.000x - (6.500x + 17.500.000) \\
 & 17.500.000 = 10.000x - 6.500x - 17.500.000 \\
 & 17.500.000 + 17.500.000 = 3.500x \\
 & x = \frac{35.000.000}{3.500} = 10.000
 \end{aligned}$$

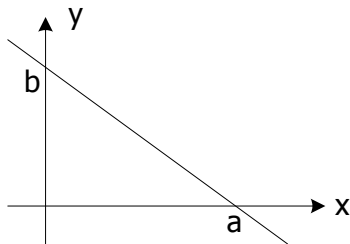
Jumlah mainan yang harus terjual agar untung Rp17.500.000,00 adalah 10.000 unit

c. Rangkuman

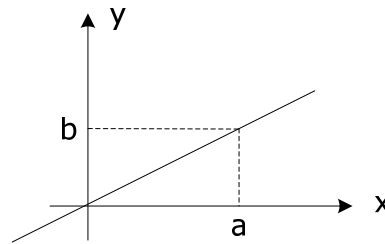
1. Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus dengan bentuk umumnya sbb.:

$$f : x \rightarrow mx + c \quad \text{atau} \quad f(x) = mx + c \quad \text{atau} \quad y = mx + c$$

2. Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier
 - a. Tentukan titik potong dengan sumbu x dengan $y = 0$; $A(x_1, 0)$
 - b. Tentukan titik potong dengan sumbu y dengan $x = 0$; $B(0, y_1)$
 - c. hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus
3. Membuat persamaan garis lurus dari grafiknya



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $bx + ay = ab$



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $y = \frac{b}{a}x$

4. Garis lurus yang melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ memiliki gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
5. Persamaan garis lurus melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
6. Persamaan garis lurus bergradien m dan melalui $A(x_1, y_1)$: $y = m(x - x_1) + y_1$
7. Persamaan garis lurus : $ax + by = c$ memiliki gradien $m = -\frac{a}{b}$
8. Persamaan garis lurus : $y = ax + b$ memiliki gradien $m = a$
9. Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan $y = c$ dan $m = 0$

10. Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan $x = c$ dan tidak memiliki gradien
11. Menentukan titik potong dua buah garis lurus *identik* dengan menyelesaikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eliminasi metode substitusi maupun metode grafik
12. Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$
13. Fungsi permintaan dan penawaran linier dirumuskan sebagai berikut:

$$P = P_0 + m x$$

P = harga satuan per unit

P_0 = harga barang tertinggi untuk fungsi permintaan

P_0 = harga barang terendah untuk fungsi penawaran

x = jumlah barang ($x \geq 0$)

m = gradien fungsi dengan $m < 0$ untuk fungsi permintaan

$m > 0$ untuk fungsi penawaran

Kurva permintaan dan penawaran selalu di kuadran I

14. Secara matematika, kesetimbangan pasar terjadi apabila kurva permintaan dan kurva penawaran berpotongan pada sebuah titik yang dinamakan titik kesetimbangan pasar. Menentukan titik kesetimbangan pasar diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan linier dua variabel x dan P
15. Jika pendapatan yang diterima sama dengan biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan tidak untung atau tidak rugi. Hal seperti ini disebut dengan titik pulang pokok atau *break even point*

LATIHAN

3

1. Dari fungsi linier di bawah ini, manakah yang termasuk fungsi permintaan dan fungsi penawaran, berikan alasan dari nilai gradiennya
 - a. $5P + 2x = 400$
 - b. $2P - 3x - 300 = 0$
 - c. $3x = P - 350$
 - d. $P = -5x + 10$
 - e. $10P + 2x = 500$
 - f. $5x = 2p - 250$
2. Harga tertinggi pada fungsi permintaan suatu barang adalah Rp1.500,00. Jika pada saat harganya Rp800 jumlah barang yang diminta adalah 350 unit.
 - a. Tentukan fungsi permintaan liniernya
 - b. Lukis kurva permintaannya
3. Harga terendah pada fungsi penawaran suatu barang adalah Rp5.000,00. Jika pada saat harganya Rp8.000 jumlah barang yang diminta adalah 600 unit.
 - a. Tentukan fungsi penawaran liniernya
 - b. Lukis kurva penawarannya

4. Dalam hukum penawaran suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp500,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 50 unit, dan jika harga barang Rp650,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 80 unit.
 - a. Tentukan rumus fungsi penawarannya
 - c. Sketsa grafik penawarannya
 - b. Jika Jumlah barang yang ditawarkan 500 unit, tentukan harga barang tersebut.

 5. Dalam hukum permintaan suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp1.250,00 tiap unit maka jumlah barang yang diminta 500 unit, dan jika harga barang 900,00 tiap unit maka jumlah barang yang diminta 600 unit.
 - a. Tentukan rumus fungsi permintaannya
 - b. Jika harga barang Rp1.600,00, tentukan jumlah barang yang diminta.

 6. Tentukan titik kesetimbangan pasarnya dan sketsa grafiknya dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran di bawah ini:
 - a. Fungsi permintaan: $P = -7x + 1400$
Fungsi penawaran: $P = 3x + 400$

 - b. Fungsi permintaan: $3P + 7x = 1.500$
Fungsi penawaran: $2P - 5x = 900$

 - c. Fungsi permintaan: $x = -4p + 3.400$
Fungsi penawaran: $2P = 5x + 600$

 - d. Fungsi permintaan: $3P + 2x = 230$
Fungsi penawaran: $2P - 9x = 50$

 7. CV BAGI ADIL memproduksi suatu barang dengan biaya Rp2.500,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp12.500.000,00. Jika produk dijual Rp10.000,00 dengan pemberian rabat kepada distributor sebesar 20%. Tentukan:
 - a. Tentukan fungsi biayanya B jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan.
 - b. Jumlah barang yang harus terjual agar terjadi *break even point*
 - c. Jumlah barang yang harus terjual agar CV untung Rp2.500.000,00

 8. Biaya untuk memproduksi 10 buah kemeja pria adalah Rp800.000,00. Sedangkan bila memproduksi 30 buah adalah Rp2.000.000,00. Jika fungsi biaya dianggap fungsi linier:
 - a. Tentukan persamaan fungsi biayanya
 - b. Tentukan besar biaya tetapnya
 - c. Tentukan besar biayanya jika kemeja yang diproduksi 50 unit

 9. PT KIRANA mencetak sebuah buku dengan biaya Rp12.000,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp15.000.000,00. Jika buku dijual dengan harga Rp30.000,00 dengan perhitungan 30 % untuk rabat distributor dan 10% untuk royalti pengarang, tentukan :
 - a. Fungsi biayanya B jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan.
 - b. Jumlah buku yang harus terjual agar terjadi *break even point*
 - c. Jumlah buku yang harus terjual agar perusahaan untung Rp15.000.000,00
-
-

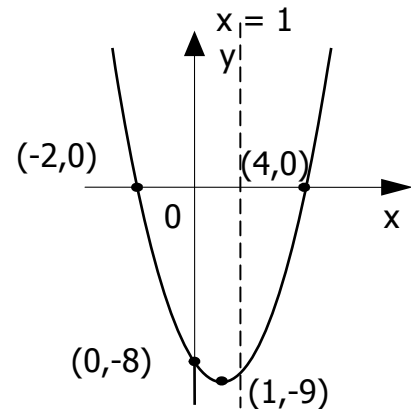
$$\begin{aligned} \text{❖ Persamaan sumbu simetri } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(-2)}{2(1)} = 1 \end{aligned}$$

❖ Koordinat titik balik

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} & y &= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{(-2)}{2(1)} & &= -\frac{(-2)^2 - 4(1)(-8)}{4(1)} \\ &= 1 & &= -\frac{4 + 32}{4} = -9 \end{aligned}$$

Koordinat titik balik adalah (1, -9).

❖ Karena $a = 1 > 0$ maka grafik membuka ke atas.



b. Grafik fungsi $f(x) = 4x - x^2$ mempunyai persamaan $y = 4x - x^2$ dimana koefisien $a = -1$, $b = 4$ dan $c = 0$.

❖ Titik potong grafik dengan sumbu x , untuk $y = 0$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 4$$

Titik potong dengan sumbu x adalah (0, 0) dan (4, 0).

Nilai $x = 0$ dan $x = 4$ disebut pembuat nol fungsi, artinya pada saat $x = 0$ dan $x = 4$ fungsi tersebut bernilai nol.

❖ Titik potong grafik dengan sumbu y , untuk $x = 0$

$$y = 4(0) - (0)^2 = 0$$

Titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, 0).

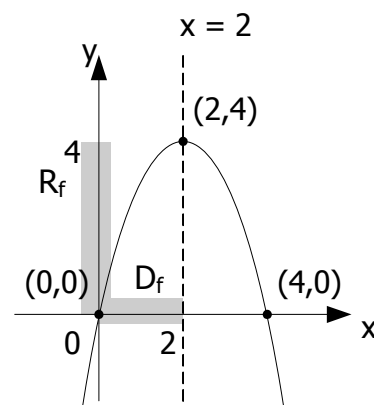
$$\begin{aligned} \text{❖ Persamaan sumbu simetri } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{4}{2(-1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

❖ Koordinat titik balik

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} & y &= -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{4}{2(-1)} & &= -\frac{4^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)} \\ &= 2 & &= -\frac{16}{-4} = 4 \end{aligned}$$

Koordinat titik balik adalah (2, 4).

❖ Karena $a = -1 < 0$ maka grafik membuka ke bawah.



Koordinat titik balik grafik fungsi kuadrat dapat berupa titik maksimum atau titik minimum tetapi tidak sekaligus kedua-duanya.

❖ Jika $a < 0$ maka titik balik berupa titik maksimum dan

❖ Jika $a > 0$ maka titik balik berupa titik minimum.

Pada contoh 37 b. grafik fungsi mempunyai titik maksimum $(2, 4)$ dengan nilai maksimum sama dengan 4 atau $y = 4$. Sedangkan pada contoh 37 a. grafik fungsi mempunyai titik minimum $(1, -9)$ dengan nilai minimum -9 atau $y = -9$.

Sehingga nilai maksimum atau minimum grafik fungsi adalah $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$,

ini terjadi pada saat $x = -\frac{b}{2a}$.

Contoh 43

Jika domain dari fungsi pada contoh 42 b. adalah $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, tentukan range fungsi tersebut !

Jawab:

Domain dan range fungsi dapat dilihat dari grafik pada jawaban contoh nomor 42b yang merupakan selang terarsir pada sumbu x dan sumbu y , yaitu pada $x = 0$ nilai fungsi $f(0) = 4(0) - 0^2 = 0$, sedangkan $x = 2$ fungsi bernilai $f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$. Sehingga range berada pada interval 0 sampai 4 atau $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 4, y \in \mathbb{R}\}$.

Yang perlu diperhatikan untuk mencari range adalah selain nilai pada ujung-ujung interval yang diperiksa tetapi juga nilai maksimum atau minimum fungsi. Interval range/daerah hasil diperoleh di antara nilai terkecil dan terbesar dari ketiga nilai tersebut.

Contoh 44

Tentukan range $f(x) = x^2 - 2x - 3$ dengan domain $D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$!

Jawab:

Nilai pada ujung-ujung interval

$$\text{Untuk } x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 2(4) - 3 = 5$$

$$\text{Nilai maksimum/minimum } y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}{4 \cdot 1} = -\frac{16}{4} = -4$$

Dari ketiga nilai yang didapat dapat disimpulkan bahwa range fungsi tersebut adalah $R_f = \{y \mid -4 \leq y \leq 5, y \in \mathbb{R}\}$.

Contoh 45

Selembar plat berbentuk persegi panjang. Jika diketahui kelilingnya 180 cm, berapakah luas maksimum plat tersebut ?

Jawab:

Misalkan panjang plat = p dan lebarnya = t

$$\text{Keliling } K = 2(p + t) = 180$$

$$p + t = 90$$

Artinya $p = 90 - t$ atau $t = 90 - p$.

$$\begin{aligned} \text{Luas } L &= p \cdot t = (90 - t)t \\ &= 90t - t^2 \end{aligned}$$

$$\text{Luas maksimum} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{90^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = -\frac{8100}{-4} = 2.025 \text{ cm}^2$$

Contoh 46

Jika $x + y = 5$, Tentukanlah nilai x dan y agar bentuk $(x - 2y + 4)(-x + 2y + 8)$ mencapai nilai maksimum, dan tentukan pula nilai maksimum tersebut.

Jawab:

$$\text{Misalkan } P = (x - 2y + 4)(-x + 2y + 8)$$

$$x + y = 5$$

$$y = 5 - x \text{ substitusi pada } P$$

$$\begin{aligned} P &= (x - 2(5 - x) + 4)(-x + 2(5 - x) + 8) \\ &= (x - 10 + 2x + 4)(-x + 10 - 2x + 8) \\ &= (3x - 6)(-3x + 18) \\ &= -9x^2 + 72x - 108 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \text{ mencapai maksimum jika : } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{72}{2(-9)} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 5 - x \\ &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \text{ maksimumnya} &= -9x^2 + 72x - 108 \\ &= -9 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 - 108 \\ &= 36 \end{aligned}$$

c. Rangkuman

1. Bentuk umum fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $y = ax^2 + bx + c$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola
2. Langkah-langkah yang ditempuh untuk menggambar grafik fungsi kuadrat adalah:
 - a. Titik potong grafik dengan sumbu x , dengan mengambil $y = 0$.
 - b. Titik potong grafik dengan sumbu y , dengan mengambil $x = 0$.
 - c. Sumbu simetri grafik yaitu $x = -\frac{b}{2a}$
 - d. Koordinat titik balik atau titik puncak (x, y) dinamakan $x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dengan $D = b^2 - 4ac$.
 - e. Grafik terbuka ke bawah jika $a < 0$ dan terbuka ke atas jika $a > 0$.

LATIHAN

4

1. Tentukan: titik potong dengan sumbu x , sumbu y , persamaan sumbu simetri, koordinat titik balik, gambar grafik dan range dari fungsi berikut ini!
 - a. $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $D_f = \{x \mid -1 < x < 4, x \in \mathbb{R}\}$
 - b. $g(x) = x^2 - 4$, $D_g = \{x \mid 0 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
 - c. $h(x) = -x^2 + 6x$, $D_h = \{x \mid -1 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{R}\}$
 - d. $k(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $D_k = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$

2. Bayangan $x = -2$ oleh fungsi $f(x) = x^2 - 3x + k - 1$ adalah 0, tentukan nilai k dan gambar grafiknya!

3. Grafik fungsi $g(x) = (a - 2)x^2 - 3x + a - 4$ melalui titik $(-1, 1)$, tentukan
 - a. Nilai a
 - b. Range fungsi dengan domain $D_g = \{x \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{B}\}$.

4. Tentukan nilai p agar fungsi kuadrat $f(x) = px^2 + 4x + 2$ bernilai minimum sama dengan 3.

5. Sebuah peluru ditembakkan ke udara hingga lintasannya berbentuk parabola. Tinggi lintasan peluru setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 20t - 2t^2$. Dari grafiknya, tentukanlah:
 - a. Setelah berapa detik peluru tersebut mencapai tinggi maksimum.
 - b. Tinggi maksimum peluru tersebut.
 - c. Waktu yang diperlukan peluru hingga jatuh kembali ke tanah.

6. Jumlah dua bilangan sama dengan 20. Tentukan dua bilangan tersebut supaya hasil kalinya maksimum dan bilangan-bilangan itu !

7. Tentukanlah nilai p dari data di bawah ini:
 - a. Nilai maksimum $px^2 - 4x + p - 2$ adalah 1
 - b. Nilai maksimum $px^2 + 4x + p$ adalah 3

8. Hitunglah nilai minimum dari $x^2 + y^2$ untuk $2x + y = 4$.

9. Nilai minimum fungsi $f(x) = ax^2 + bx - 8$ adalah -9 dicapai pada $x = 1$, tentukanlah:
 - a. Nilai a dan b
 - b. Sketsa gambar grafiknya

10. Sebatang besi 400 centimeter akan dibuat persegi panjang dengan cara memotong kemudian mengelasnya untuk menyambungkannya kembali, berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar didapat luas persegi panjang yang maksimum dan hitung luas maksimum tersebut !

11. Keliling suatu segitiga siku-siku 25 cm. Jika sisi miringnya 9 cm, tentukanlah luas maksimum segitiga tersebut.

12. Luas dari kertas poster = $2m^2$. Bidang gambar pada kertas poster itu dibatasi dengan margin atas dan margin bawah masing-masing 21 cm, margin kiri dan margin kanan masing-masing selebar 14 cm. Jika panjang kertas poster adalah x dan luas bidang gambar adalah L .
- Nyatakan L sebagai fungsi dalam x
 - Tentukan luas maksimum bidang gambar tersebut

B.4 Menerapkan Konsep Fungsi Kuadrat

a. Tujuan

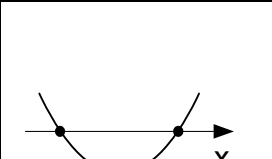
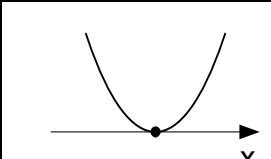
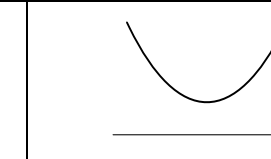
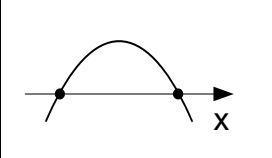
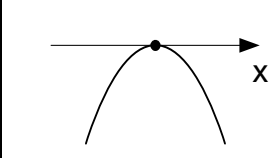
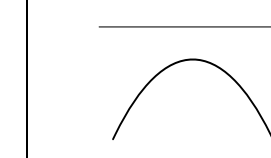
Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menentukan sifat-sifat fungsi kuadrat berdasarkan nilai diskriminannya
- Menentukan persamaan fungsi kuadrat jika diketahui grafik atau unsur-unsur lainnya
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan fungsi kuadrat

b. Uraian Materi

1). Kedudukan Grafik fungsi kuadrat

Kedudukan grafik fungsi kuadrat yang dilihat dari banyaknya titik potong dengan sumbu x , ditentukan oleh nilai diskriminan yaitu $D = b^2 - 4ac$. Sedangkan grafik membuka ke atas atau ke bawah ditentukan oleh tanda a (koefisien x^2). Berikut beberapa kemungkinan kedudukan grafik dilihat dari harga diskriminan dan tanda a (koefisien x^2):

		Nilai Diskriminan (D)		
		D > 0	D = 0	D < 0
Tanda a	a > 0	 (a)	 (b)	 (c)
	a < 0	 (e)	 (f)	 (g)

Gambar II.d : Kedudukan fungsi kuadrat berdasarkan nilai D dan tanda a

Keterangan:

- Pada (a) dan (e) untuk $D > 0$ grafik memotong sumbu x di dua titik, jika $a > 0$ grafik membuka ke atas sebaliknya membuka ke bawah untuk $a < 0$.

$$0 = (m+1)^2 - 4.m.1$$

$$0 = m^2 - 2m + 1$$

$$0 = (m - 1)^2$$

$$m = 1$$

Jadi agar $g(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$ menyinggung sumbu x , nilai $m = 1$

2). Menentukan Persamaan Grafik Fungsi Kuadrat

Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dicari jika kondisi-kondisi dibawah ini diketahui:

- Grafik memotong sumbu x di $(x_1,0)$ dan $(x_2,0)$ serta melalui titik sembarang (x_3,y_3) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Grafik mempunyai titik balik $P(x_p,y_p)$ serta melalui titik sembarang (x_1,y_1) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
- Grafik melalui tiga buah titik yaitu (x_1,y_1) , (x_2,y_2) dan (x_3,y_3) , maka persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$.

Contoh 49

Tentukan persamaan grafik fungsi yang mempunyai titik balik di titik $(1,-1)$ serta melalui $(2, 3)$.

Jawab:

Kondisi yang di ketahui adalah titik balik $P(1,-1)$ serta melalui titik $(2,3)$ dan dari kondisi tersebut kita dapat $x_p = 1$ dan $y_p = -1$ sehingga persamaannya adalah

$$y = a(x - 1)^2 + (-1) \quad \text{grafik melalui } (2, 3) \text{ didapat}$$

$$3 = a(2 - 1)^2 + (-1)$$

$$3 = a - 1$$

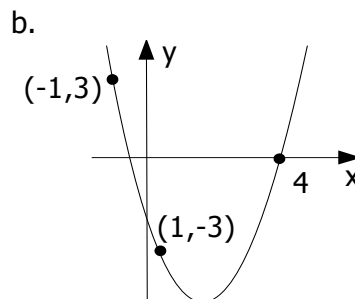
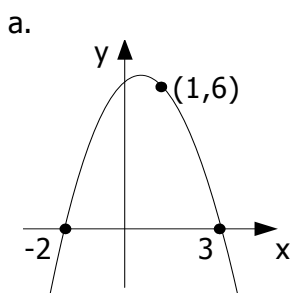
$$a = 4$$

Sehingga $y = 4(x - 1)^2 + (-1)$

$$y = 4(x^2 - 2x + 1) - 1 = 4x^2 - 8x + 3$$

Contoh 50

Tentukan persamaan grafik dari fungsi grafik seperti pada gambar di bawah ini!



Jawab:

- a. Grafik memotong sumbu x di titik $(-2, 0)$ dan $(3, 0)$

Sehingga $y = a(x + 2)(x - 3)$ melalui titik $(1, 6)$

$$6 = a(1 + 2)(1 - 3)$$

$$6 = a(3)(-2)$$

$$6 = -6a$$

$$a = -1$$

Substitusikan kembali $a = -1$ ke $y = a(x + 2)(x - 3)$ didapat

$$\begin{aligned} y &= -1(x + 2)(x - 3) = -1(x^2 - 3x + 2x - 6) \\ &= -x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

Jadi persamaan grafik fungsi adalah $y = -x^2 + x + 6$.

- b. Grafik melalui tiga buah titik, yaitu $(-1, 3)$, $(1, -3)$ dan $(4, 0)$. Gunakan persamaan bentuk $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} (-1, 3) &\Rightarrow 3 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 3 &= a - b + c \quad \dots 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, -3) &\Rightarrow -3 = a(1)^2 + b(1) + c \\ -3 &= a + b + c \quad \dots 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4, 0) &\Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + c \\ 0 &= 16a + 4b + c \quad \dots 3) \end{aligned}$$

Eliminasi persamaan 1) dan 2) didapat

$$a - b + c = 3$$

$$\underline{a + b + c = -3} -$$

$$-2b = 6$$

$$b = -3$$

Eliminasi persamaan 1) dan 3) didapat

$$16a + 4b + c = 0$$

$$\underline{a - b + c = 3} -$$

$$15a + 5b = -3 \quad \text{substitusi } b = -3 \text{ didapat } 15a + 5b = -4$$

$$15a + 5(-3) = -3$$

$$15a - 15 = -3$$

$$15a = 12$$

$$a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Substitusi $a = \frac{4}{5}$ dan $b = -3$ ke persamaan 1) didapat $a - b + c = 3$

$$3 = a - b + c$$

$$3 = \frac{4}{5} - (-3) + c$$

$$c = -\frac{4}{5}$$

Substitusi $a = \frac{4}{5}$, $b = -3$ dan $c = -\frac{4}{5}$ ke persamaan $y = ax^2 + bx + c$, sehingga

persamaan yang dicari adalah $y = \frac{4}{5}x^2 - 3x - \frac{4}{5}$

c. Rangkuman

1. Kedudukan grafik fungsi kuadrat ditinjau dari nilai diskriminan (D) dan a adalah sebagai berikut:
 - a. Jika $D > 0$ maka grafik memotong sumbu x di dua titik
 - b. Jika $D = 0$ maka grafik menyinggung sumbu x
 - c. Jika $D < 0$ maka grafik tidak memotong sumbu x
 - d. Jika $a > 0$ maka grafik terbuka ke atas dan diperoleh titik puncak minimum
 - e. Jika $a < 0$ maka grafik terbuka ke bawah dan diperoleh titik puncak maksimum
2. Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dicari jika kondisi-kondisi di bawah ini diketahui:
 - a. Grafik memotong sumbu x di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ serta melalui titik sembarang (x_3, y_3) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 - b. Grafik mempunyai titik balik $P(x_p, y_p)$ serta melalui titik sembarang (x_1, y_1) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
 - c. Grafik melalui tiga buah titik yaitu (x_1, y_1) , (x_2, y_2) dan (x_3, y_3) , maka persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$.

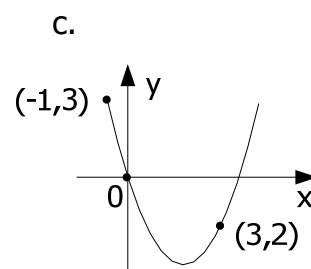
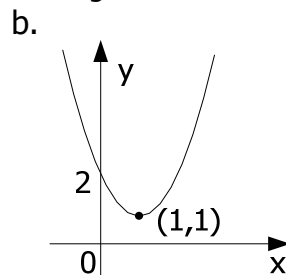
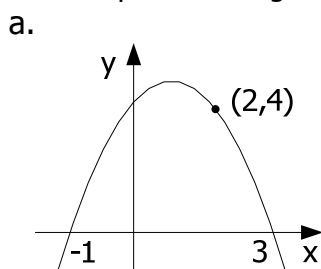
LATIHAN**4**

1. Tentukanlah sifat-sifat grafik fungsi kuadrat berikut berdasarkan nilai a dan diskriminannya:

a. $y = x^2 - 12x + 20$	f. $y = 2x^2 - x + 1$
b. $y = -x^2 - 4x - 10$	g. $y = 6x^2 + 9x$
c. $y = x^2 - 12x + 36$	h. $y = 6x^2 - 17x + 5$
d. $y = (x - 4)^2$	i. $y = -x^2 - x + 10$
e. $y = -x^2 - 2x + 35$	j. $y = -x^2 - 4x + 5$
2. Tentukanlah batas-batas nilai m supaya grafik fungsi menyinggung sumbu x

a. $f(x) = x^2 - 2mx + (3m + 4)$	c. $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2)$
b. $g(x) = mx^2 + 6x + 9$	d. $h(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$
3. Tentukan persamaan grafik fungsi berikut:
 - a. Grafik memotong sumbu x di titik $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$ serta melalui titik $(2, 1)$.
 - b. Titik potong dengan sumbu x adalah $(-3, 0)$ dan $(1, 0)$ serta melalui titik $(0, 9)$
 - c. Titik puncak $(3, 1)$ dan melalui titik $(0, 8)$
 - d. Grafik mempunyai titik puncak $P(2, 1)$ serta melalui titik $(0, 4)$.
 - e. Grafik melalui titik $(1, 0)$, $(-1, -2)$ dan titik $(3, 1)$.
 - f. Grafik melalui $(-2, -3)$, $(2, 5)$, dan $(3, 12)$
4. Tentukan fungsi kuadrat jika grafiknya mempunyai titik balik $P(3, -1)$ serta $f(1) = 7$.
5. Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai nilai-nilai nol (pembuat nol) 2 dan 5, sedangkan nilai maksimumnya adalah 9!

6. Tentukan persamaan grafik fungsi dari gambar berikut:



7. Koordinat titik puncak grafik fungsi $y = ax^2 + bx + 5$ ialah $(4,9)$, tentukan nilai a dan b !

Uji Kemampuan

A. Pilihan Ganda

- Untuk fungsi $f: x \rightarrow 3x^2 - 4x$ maka bayangan dari -6 adalah
 - 112
 - 122
 - 126
 - 132
 - 142
- Pembuat nol fungsi dari fungsi kuadrat $f(x) = 16 - x^2$ adalah
 - 8 dan -8
 - 4 dan -4
 - 0 dan 16
 - 0 dan -16
 - 4 dan 8
- Persamaan sumbu simetri dari $f(x) = 6 - 5x - x^2$ adalah
 - $x = -2$
 - $x = 2$
 - $x = -2\frac{1}{2}$
 - $x = 3$
 - $x = 5$
- Diketahui $f(x) = x^2 + 4x - 5$, maka nilai minimumnya adalah
 - 17
 - 9
 - 5
 - 2
 - 4
- Diketahui fungsi kuadrat melalui titik $(0, -6)$, $(3, 0)$ dan $(-2, 0)$ maka persamaan kuadrat nya adalah
 - $f(x) = x^2 - x - 6$
 - $f(x) = x^2 + x + 6$
 - $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$
 - $f(x) = x^2 - 2x + 12$
 - $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$
- Harga kesetimbangan pasar dari fungsi permintaan $q = 15 - p$ dan fungsi penawaran $q = 2p - 6$, jika p menyatakan harga dan q menyatakan jumlah adalah
 - 3
 - 6
 - 7
 - 8
 - 9
- Diketahui $F(x) = ax + 6$, $f(-2) = 10$ maka $f(5) =$
 - 4
 - 2
 - 4
 - 2
 - 6

3. Diketahui $(m - 3)x^2 + (2m - 3)x + m = 0$. Tentukan nilai m !
 - a. Agar mempunyai dua akar real berlainan
 - b. Tidak mempunyai akar real
4. Diketahui $f(x) = -2x^2 - 5x + 7$ dengan domain $\{x | -5 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$. Tentukanlah !
 - a. Koordinat titik potong dengan sumbu x
 - b. Koordinat titik potong dengan sumbu y
 - c. Persamaan sumbu simetri
 - d. Koordinat titik puncak
 - e. Range
 - f. Sketsa grafiknya
5. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya:
 - a. Melalui titik $A(0, 3)$, $B(2, -5)$, $C(-1, 3)$
 - b. Mempunyai titik puncak $(1, 4)$ dan memotong sumbu y di titik $(0, 6)$
 - c. Memotong sumbu x di $(2, 0)$ dan $(-5, 0)$ dan melalui titik $(0, -20)$
6. Tentukan nilai m agar $f(x) = mx^2 - (m + 2)x + m$ menyinggung sumbu x dan membuka ke atas!
7. Segitiga siku-siku yang mana mempunyai luas terbesar jika jumlah sisi siku-sikunya sama dengan 25 cm ? Tentukan luas maksimumnya
8. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 8x + m^2 - 2m + 1 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Tentukan nilai m supaya $x_1 x_2$ maksimum !
9. Grafik fungsi $f(x) = (p+3)x^2 - 2(p - 1)x + 2p - 5$ mempunyai titik puncak yang absisnya sama dengan p . Tentukan p dan lukiskan grafiknya !
10. Tentukanlah nilai supaya $y = mx^2 + (m - 5)x + 8$ menyinggung garis $y + 1 = 2x$.
11. Diketahui $f(x) = ax + b$. dengan $f(-4) = -13$ dan $f(2) = 5$ Tentukan :
 - a. Nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya
 - b. Nilai dari $f(-6)$
 - c. Nilai m jika $f(m) = 14$

*Nasihat yang terbaik diberikan oleh pengalaman.
Tapi nasihat ini datangnya selalu terlambat*